

Geometría I

Examen V

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría I

Examen V

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2023

Asignatura Geometría I.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Juan de Dios Pérez Jiménez¹.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 15 de febrero de 2022.

¹El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1. [4 puntos] Sean V y V' espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K . Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $f : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal y $\{w_1, \dots, w_k\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $\{f(w_1), \dots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente.
 b) $\mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\}) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$

Demostración. Procedemos mediante doble implicación:

- a) \implies b) Partimos de que $\{w_1, \dots, w_k\} \subset V$ es linealmente independiente. Como además $\{f(w_1), \dots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente, tenemos que un conjunto linealmente independiente se aplica en otro linealmente independiente, de lo que deducimos que f es un monomorfismo. Por tanto:

$$f \text{ monomorfismo} \implies \text{Ker}(f) = \{0\} \implies \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\}) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$$

quedando demostrada la primera implicación.

- b) \implies a) Partimos de que $\mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\}) \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$ y buscamos demostrar que $\{f(w_1), \dots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente. Equivalentemente, demostraremos que f es un monomorfismo.

Sea $v \in \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\}) \subseteq V$, $v \neq 0$. Si fuese $f(v) = 0$, llegamos a la siguiente contradicción:

$$f(v) = 0 \implies v \in \text{Ker}(f) \implies v \in \{0\} \implies v = 0$$

pero es una contradicción, ya que $v \neq 0$. Por tanto, tenemos que $f(v) \neq 0$. Como $v \in \mathcal{L}(\{w_1, \dots, w_k\})$, es combinación lineal de los vectores del sistema generador. Por tanto,

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k \quad a_i \in \mathbb{K}$$

Aplicando f , sabiendo que esta es una aplicación lineal, y que $f(v) \neq 0$; tenemos que:

$$f(v) = f(a_1 w_1 + \dots + a_k w_k) = a_1 f(w_1) + \dots + a_k f(w_k) \neq 0$$

Por tanto, $f(v) = 0 \iff v = 0$. Por tanto, $\text{Ker}(f) = 0$ y por tanto f es un monomorfismo. Por tanto, queda demostrado que $\{f(w_1), \dots, f(w_k)\} \subset V'$ es linealmente independiente.

□

2. Si V y V' son finitamente generados y $f : V \rightarrow V'$ es una aplicación lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f y f^t son ambas inyectivas.

b) f es biyectiva.

Demostración. Tenemos que:

$$f^t : (V')^* \longrightarrow V^*$$

Además, adoptamos las siguientes notaciones:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = n \qquad \dim_{\mathbb{K}}(V') = n'$$

Sean también $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V, V' respectivamente y $\mathcal{B}^*, (\mathcal{B}')^*$ sus respectivas bases duales.

Procedemos mediante doble implicación:

a) \implies b) Partimos de que f, f^t son inyectivas.

$$f \text{ inyectiva} \implies \text{rg}(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})) = n$$

$$f^t \text{ inyectiva} \implies \text{rg}(M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*)) = \dim_{\mathbb{K}}(V')^* = n'$$

Por tanto, como $(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}))^t = M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow (\mathcal{B}')^*) \implies n = n'$. Por tanto,

$$\text{rg}(M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = n = n' = \dim_{\mathbb{K}}(V')$$

Por tanto, tenemos que $\text{Im}(f) = V'$ y, por tanto, f es sobreyectiva. Como hemos supuesto que es inyectiva, tenemos que es biyectiva.

b) \implies a) Partimos de que f es biyectiva, por lo que tenemos de forma directa que f es inyectiva.

Como f es sobreyectiva, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V') = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f^t))$$

Aplicando las propiedades del espacio dual, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(V')^* = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}(f^t)) \implies \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}(f)) = 0 \implies \text{Ker}(f^t) = \{0\}$$

por tanto, tenemos que f^t es inyectiva.

□

3. Si $U \subset V$ es un subespacio vectorial y $\{w_1 + U, \dots, w_k + U\}$ es un conjunto linealmente independiente en V/U , entonces $\{w_1, \dots, w_k\}$ es linealmente independiente en V .

Demostración. Sea $0 = a_1w_1 + \dots + a_kw_k \in V \quad a_i \in \mathbb{K}$.

Veamos que $a_1 = \dots = a_k = 0$.

$$0 = a_1w_1 + \dots + a_kw_k \implies$$

$$\implies 0 + U = (a_1w_1 + \dots + a_kw_k) + U = a_1(w_1 + U) + \dots + a_k(w_k + U)$$

Como tenemos que $\{w_1 + U, \dots, w_k + U\}$ es un conjunto linealmente independiente en V/U , tenemos que $a_1 = \dots = a_k = 0$. Por tanto, queda demostrado que $\{w_1, \dots, w_k\}$ es linealmente independiente en V . □

Ejercicio 2. [2 puntos] Sean V y V' espacios vectoriales finitamente generados sobre un mismo cuerpo K . Demostrar que la aplicación transposición

$$\begin{aligned} {}^t : \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*) \\ f &\longmapsto f^t \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Suponemos que es una forma lineal (habría que demostrarlo).

Veamos en primer lugar que es un monomorfismo.

$$\text{Ker}({}^t) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V') \mid f^t = c_0\}$$

para todo $f \in \text{Ker}({}^t)$, se tiene que $f^t = 0$. Por tanto,

$$\forall \varphi' \in (V')^*, f^t(\varphi') = \varphi' \circ f = c_0 \implies f = c_0 \implies \text{Ker}({}^t) = 0 \implies {}^t \text{ inyectiva}$$

Veamos ahora que es un epimorfismo, es decir, $\text{Im}({}^t) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$.

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Ker}({}^t)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}({}^t)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}({}^t))$$

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim_{\mathbb{K}}(V) \cdot \dim_{\mathbb{K}}(V') = \dim_{\mathbb{K}}(V^*) \cdot \dim_{\mathbb{K}}((V')^*) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*))$$

Por tanto, tenemos que:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)) = \dim_{\mathbb{K}}(\text{Im}({}^t))$$

Como además tenemos que $\text{Im}({}^t) \subseteq \text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$, tenemos que $\text{Im}({}^t) = \text{Hom}_{\mathbb{K}}((V')^*, V^*)$. Por tanto, t es un epimorfismo.

Por tanto, t es un isomorfismo. \square

Ejercicio 3. [4 puntos] Dado $k \in \mathbb{R}$, se consideran los subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 siguientes:

$$\begin{aligned} U_k &= \mathcal{L}(\{(1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}), \\ V &= \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} y - x = 0 \\ t - x = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

1. Obtener una base y la dimensión de U_k para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para hallar el número de vectores linealmente independientes del sistema generador y, por tanto la dimensión y la base del subespacio vectorial, calculamos el rango de la siguiente matriz:

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para facilitar los cálculos, realizamos la transformación elemental $F'_4 = 2F_4 - F_2$, que no cambia el rango.

$$\text{rg}(A) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango, vemos el valor del determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = \\ &= 2[2(2-k) + k(k+1) + 4 - 4k - 2 - (k+1)(2-k)] = \\ &= 2[4 - 2k + k^2 + k + 4 - 4k - 2 - 2k + k^2 - 2 + k] = \\ &= 2[2k^2 - 6k + 4] = 4[k^2 - 3k + 2] = 0 \iff \begin{cases} k = 2 \\ \vee \\ k = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Realizamos por tanto la siguiente distinción de casos:

- Para $k = 1, 2$:

Tenemos que $rg(A) = 2$, por lo que hay dos vectores linealmente independientes. Veamos cuáles son:

$$\begin{vmatrix} k+1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(k+1) - 8 = 2[k+1-4] = 2[k-3] = 0 \iff k = 3$$

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} U_k &= \mathcal{L}(\{(k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}) \\ \dim_{\mathbb{R}}(U_k) &= 2 \end{aligned}$$

- Para $k \neq 1, 2$:

Tenemos que $rg(A) = 3$, por lo que los tres vectores son linealmente independientes.

$$\begin{aligned} U_k &= \mathcal{L}(\{(1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\}) \\ \dim_{\mathbb{R}}(U_k) &= 3 \end{aligned}$$

2. Calcular una base de $U_k + V$ y de $U_k \cap V$. ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus V$?

$$V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} y - x = 0 \\ t - x = 0 \end{array} \right\} = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\})$$

Tenemos que:

$$U_k + V = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, k, 1), (k+1, 4, 2, 2), (2, 2, 2-k, 1)\})$$

Veamos cuántos vectores son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & k & 2-k \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 4 - 2 - 1 = -1 \neq 0$$

Por tanto, tenemos que esos 4 vectores son linealmente independientes.

$$U_k + V = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, k, 1), (2, 2, 2 - k, 1)\}) = \mathbb{R}^4 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Ahora procedemos a calcular $U_k \cap V$:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) &= \dim_{\mathbb{R}}(U_k) + \dim_{\mathbb{R}}(V) - \dim_{\mathbb{R}}(U_k + V) = \dim_{\mathbb{R}}(U_k) + 2 - 4 = \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(U_k) - 4 \end{aligned}$$

Realizamos por tanto la siguiente distinción de casos:

- Para $k = 1, 2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 2 \implies \dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) = 0 \implies U_k \cap V = \{0\}$$

- Para $k \neq 1, 2$:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_k) = 3 \implies \dim_{\mathbb{R}}(U_k \cap V) = 1$$

Calculo unas ecuaciones implícitas de U_k :

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 & x \\ 2 & 4 & 2 & y \\ k & 2 & 2-k & z \\ 1 & 2 & 1 & t \end{vmatrix} = 0 = \\ &= -x \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + t \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Calculo en primer lugar los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (F_1 = 2F_3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ k & 2 & 2-k \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = -2[k^2 - 3k + 2] \quad (\text{Ya calculado})$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (F_2 = 2F_3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & k+1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 2 & 2-k \end{vmatrix} = 4[k^2 - 3k + 2]$$

Por tanto, tenemos que la ecuación implícita es:

$$0 = -0x - 2y[k^2 - 3k + 2] - 0z + 4t[k^2 - 3k + 2] = 2(k^2 - 3k + 2)(-y + 2t)$$

Como $k \neq 1, 2 \implies k^2 - 3k + 2 \neq 0$. Por tanto, las ecuaciones implícitas son:

$$U_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -y + 2t = 0\}$$

Por tanto, el subespacio intersección es:

$$U_k \cap V = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \left| \begin{array}{l} x = y \\ x = t \\ y = 2t \end{array} \right. \right\} = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 0)\})$$

Para ver si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R}^4 = U_k \oplus V$, necesitamos que su intersección sea nula. Por lo visto anteriormente, tenemos que:

$$U_k \oplus V = \mathbb{R}^4 \iff k = 1, 2$$

3. Para $k = 1$, encontrar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\text{Ker}(f) = U_1$, $\text{Im}(f) = V$ y $f \circ f = f$. Calcular $M(f, B_u)$, donde B_u representa la base usual de \mathbb{R}^4 .

Tenemos que:

$$V = \text{Im}(f) = \mathcal{L}(\{(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\})$$

$$U_1 = \text{Ker}(f) = \mathcal{L}(\{(2, 4, 2, 2), (2, 2, 1, 1)\}) = \mathcal{L}(\{(1, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 1)\})$$

Notamos la base usual B_u como $B_u = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

$$\begin{aligned} (1, 2, 1, 1) \in \text{Ker}(f) &\implies f(1, 2, 1, 1) = f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ (2, 2, 1, 1) \in \text{Ker}(f) &\implies f(2, 2, 1, 1) = 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ (0, 0, 1, 0) \in \text{Im}(f) &\implies f(e_3) = e_3 \\ (1, 1, 1, 1) \in \text{Im}(f) &\implies f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ 2f(e_1) + 2f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = 0 \\ f(e_3) = e_3 \\ f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) = (1, 1, 1, 1) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = (-1, -1, -1, -1) \\ f(e_3) = e_3 \\ f(e_4) = (2, 2, 1, 2) \end{array} \right\}$$

Por tanto, tenemos que:

$$A = M(f, B_u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que $A^2 = A$, efectivamente se cumple que $f \circ f = f$.

4. Para la aplicación f calculada en el apartado anterior, hallar $Im(f^t)$ y $ker(f^t)$.
 Sea la aplicación $f^t : (\mathbb{R}^4)^* \rightarrow (\mathbb{R}^4)^*$, y definimos la base dual de la usual como:

$$(\mathcal{B}_u)^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \quad \varphi_i(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_i \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

Por la propiedades de la aplicación lineal traspuesta, tenemos que:

$$A^t = M(f^t, (\mathcal{B}_u)^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, tenemos que:

$$Im(f^t) = \mathcal{L}(\{(0, -1, 0, 2)_{(\mathcal{B}_u)^*}, (0, -1, 1, 1)_{(\mathcal{B}_u)^*}\})$$

$$\begin{aligned} Ker(f^t) &= \left\{ (a_1, a_2, a_3, a_4)_{(\mathcal{B}_u)^*} \in (\mathbb{R}^4)^* \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = 0 \right. \right\} = \\ &= \{(a_1, a_2, a_3, a_4)_{(\mathcal{B}_u)^*} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, a_3 = 0\} = \\ &= \mathcal{L}(\{(1, -1, 0, 0)_{(\mathcal{B}_u)^*}, (1, 0, 0, -1)_{(\mathcal{B}_u)^*}\}) \end{aligned}$$